

# ماجرای کلاس ریاضی

# سود باغ‌های گردو

داود معصومی‌مهوار

من: نرگس، لطفاً مسئله را بخوان تا حلش کنیم. تا می‌توانی از حافظه‌ات کمک بگیر و از رو بخوان.  
**نرگس:** پارسا و پریسا دو باغ گردو دارند؛ یک باغ کوچک قدیمی که دوسوم آن مال پارسا و یک‌سوم آن مال پریسا است و باغی جدید که هر دو با هم آن را احداث کرده‌اند و هر دو در آن سهم برابر دارند. امسال آن‌ها گردوهای هر دو باغ را به یک قیمت فروختند و پس از محاسبه و کسر هزینه‌ها متوجه شدند که به ازای هر متر مربع از باغ، ۵۰ هزار تومان سود کرده‌اند. حالا باید نسبت سود امسال پریسا و پارسا را پیدا کنیم.  
**سایه:** من نسبت سود آن‌ها را همان ۲ به ۱ پیدا کردم و با اشاره من سایه پای تخته رفت تا استدلال و راه حل خود را بنویسد.

$$\begin{aligned}
 & 50000 \times \frac{1}{3} \times \text{مساحت باغ قدیمی} = \text{سود پریسا} \\
 & 50000 \times \frac{2}{3} \times \text{مساحت باغ جدید} \\
 & 50000 \times \frac{1}{2} \times \text{مساحت باغ قدیمی} = \text{سود پارسا} \\
 & 50000 \times \frac{1}{2} \times \text{مساحت باغ جدید} \\
 & \Rightarrow \frac{50000 \times \frac{1}{3} \times \text{مساحت باغ قدیمی}}{50000 \times \frac{1}{2} \times \text{مساحت باغ قدیمی}} \\
 & \Rightarrow \frac{1/3}{1/2} = \frac{1/3 \times 2}{1/2 \times 2} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

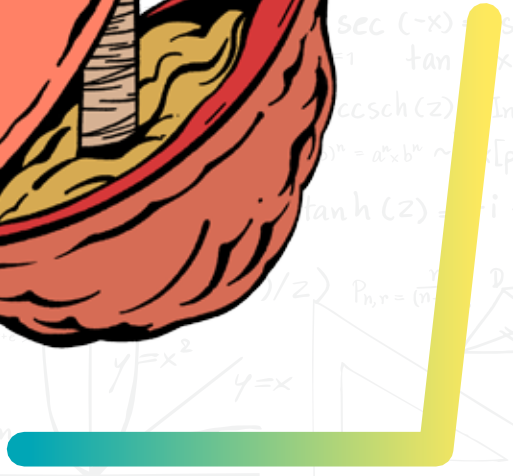
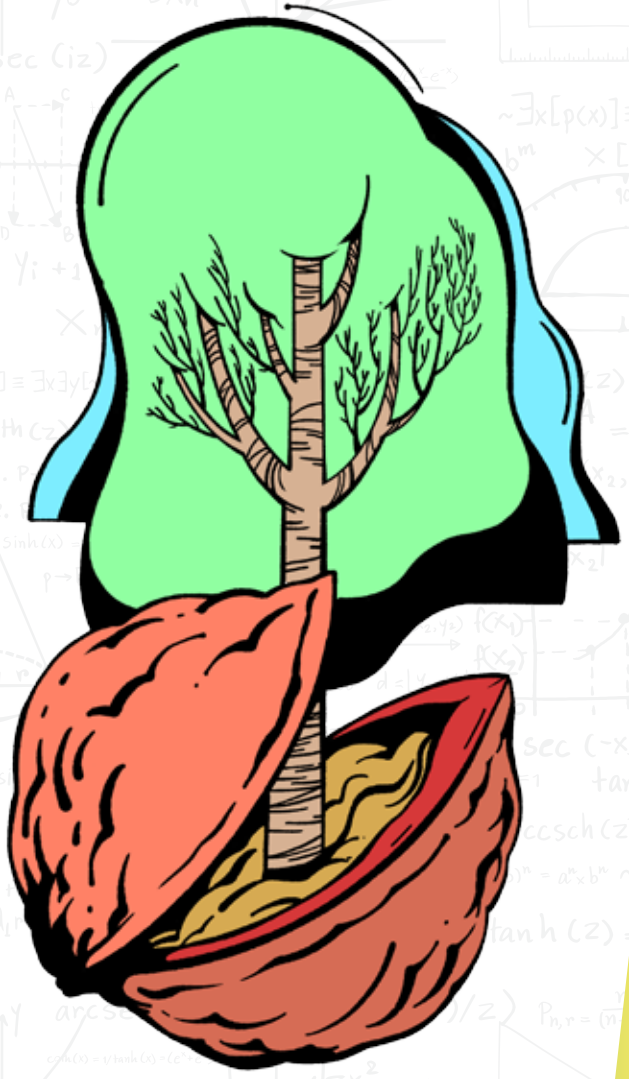
استدلال سایه

**زهرا:** من مخالفم. در اینجا ما می‌خواهیم نسبت سود دو نفر را محاسبه کنیم، ولی سایه جور دیگری با سود این دو نفر رفتار کرده است. انگار سود این دو نفر را در دو طرف یک معادله دارد! و همان‌جور که مقدارهای مساوی را از دو طرف معادله حذف می‌کنیم، اینجا هم سود حاصل از باغ جدید را برای هر دو نفر حذف کرده است. اینجا ما مجاز به چنین کاری نیستیم.  
**فرحناز:** خب سایه برای این کار استدلال داشت که ننوشت، او گفت که سود حاصل از باغ جدید برای هر دو نفر یکسان است، پس تأثیری در نتیجه ندارد، بنابراین برای اینکه بفهمیم سود پارسا چقدر بیشتر است، باید به سراغ سود باغ قدیمی برویم.  
**مریم:** همین استدلال هم درست نیست. اصلاً قرار نیست بفهمیم سود پارسا چقدر بیشتر است. قرار است نسبت سود دو نفر را پیدا کنیم. پس همان اول باید سراغ نسبت این دو عدد برویم:

$$\begin{aligned}
 3S &= \text{مساحت باغ قدیمی} \\
 2t &= \text{مساحت باغ جدید} \\
 \frac{\text{سود پریسا}}{\text{سود پارسا}} &= \frac{5 \times 8000 + t \times 8000}{15 \times 8000 + t \times 8000} \\
 &= \frac{5+t}{15+t}
 \end{aligned}$$

استدلال مریم

**مریم:** می‌بینیم که نسبت سود این دو نفر برابر  $\frac{5+t}{15+t}$  شده است. روشن است که ساده کردن  $t$  از صورت و مخرج کسر جایز نیست.  
**سایه:** خب من اصلاً چنین استدلالی نداشتم که این ایراد را داشته باشم. خودت راه مرا کج و کوله کرده‌ای و خودت هم از راه کج و کوله‌شده ایراد می‌گیری! اصلاً هم به استدلال من گوش نمی‌دهی! من گفتم بخشی از سود این دو نفر که مربوط به باغ جدید است، برای هر دو نفر برابر است و یکسان عمل می‌کند و



**لیلا:** پس منظور شما این است که راه حل سایه در کل بی معنی است و تا این اشکال اساسی برطرف نشود، نقد دیگری نباید بر آن داشته باشیم؟

**من:** دقیقاً همین منظور را دارم و اصلاً هم سخت گیری نیست. حرف معنادار زدن ساده ترین انتظار است. اما برویم سراغ این جمله مهم که «فلان کار اینجا درست نیست». ببینید، نتیجه گیری هر جور که باشد، بالاخره بر یک اساس و پایه ای استوار شده است. مثلاً ساده ترین نوع نتیجه گیری استفاده از قضیه هاست. مانند قضیه  $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$  یا  $b = 0$  که قبلاً هم به آن اشاره کرده بودیم. یا این قضیه که: «حاصل ضرب هر عددی در صفر برابر با صفر می شود». یا قضیه ای کمی پیچیده تر، مانند قضیه فیثاغورس که بعداً با آن آشنا خواهید شد. این قضیه بیان می کند که: «اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع طول وتر (ضلع روبه رو به زاویه قائمه) آن برابر است با مجموع مربع های طول دو ضلع دیگر.» پس هر جا مثلثی قائم الزاویه داشتید، مطمئن باشید که مربع طول وتر آن برابر با مجموع مربع های طول دو ضلع دیگرش خواهد بود. چون خیلی ساده می توانید استدلال درستی قضیه فیثاغورس را برای آن مثلث به کار ببرید.

خلاصه هرگاه فرض های قضیه ای درست بود، حتماً حکم و نتیجه آن هم درست خواهد بود. زیرا شما می توانید همان استدلال درستی قضیه را یک بار دیگر در مسئله خودتان تکرار کنید و درستی نتیجه را به اثبات برسانید. از این پس نگویید که فلان استدلال اینجا به کار نمی آید. اگر مقدمات و مفروضات آن استدلال را دارید و می دانید که درست هستند، حتماً باید نتیجه آن استدلال را هم بپذیرید. به یاد بیاورید که سعیده گفت: «راه مریم نسبت خواسته شده را به دست نمی آورد. پس درست نیست و باید فکر دیگری بکنیم.» این گفته سعیده هم شبیه همان جمله است که «فلان کار اینجا درست نیست». ببینید چه ایرادی به مریم می گیرید. می گوید راه او نسبت خواسته شده را به دست نمی دهد! خوب شاید اصلاً نسبت خواسته شده قابل محاسبه نیست! برای رد حرف مریم، باید نشان دهید که یکی از جمله ها یا نتیجه گیری های او فاسد و نادرست است که سعیده چنین کاری نکرد.

**بهناز:** خوب مثل اینکه همه اشتباه کرده اند! پس بالاخره نسبت سود پریسا و پارسا چقدر است؟

**من:** در این محاسبه، مریم درست استدلال کرد. او به خوبی این نسبت را برابر با  $\frac{S+t}{2S+t}$  محاسبه کرد که در آن مساحت باغ قدیمی برابر با  $2S$  و مساحت باغ جدید برابر با  $2t$  است. و البته این مقدار، مقدار ثابتی نیست و به  $S$  و  $t$  بستگی دارد؛ ببینید:

$$2S = 3000 \text{ و } 2t = 2000 \Rightarrow \frac{S+t}{2S+t} = \frac{1000+1000}{2000+1000} = \frac{2}{3}$$

$$2S = 3000 \text{ و } 2t = 20000 \Rightarrow \frac{S+t}{2S+t} = \frac{1000+10000}{2000+10000} = \frac{101}{102}$$

$$2S = 15000 \text{ و } 2t = 20000 \Rightarrow \frac{S+t}{2S+t} = \frac{5000+10000}{20000+10000} = \frac{1}{2}$$

**بهناز:** پس اساساً خود مسئله اشتباه بود؟

**من:** نه مسئله اشتباه نبود. بالاخره نسبت سود این دو نفر یک عدد است که مریم آن را پیدا کرد، ولی این عدد ثابت نیست و به مساحت باغ ها بستگی دارد.

بنابراین سراغ سود باغ قدیمی می رویم.

**سعیده:** به نظر من راه مریم یک اشکال اساسی دارد: اصلاً نسبت سود دو نفر را به دست نمی آورد. با این حال مریم با تکیه به همین راه حل بی نتیجه از راه سایه ایراد می گیرد. فکر می کنم راه مریم در این مسئله درست نیست و باید فکر دیگری بکنیم. مثلاً حتی اگر راه سایه را ناقص یا مشکل دار می دانیم، باید تلاش کنیم تا آن را بازسازی و ایرادها را برطرف کنیم.

**من:** فکر می کنم به قدر کافی هر دو طرف دفاع های خود را گفته اند. حالا حواستان به من باشد. چیزهای خوبی یاد خواهید گرفت. یک اشتباه را هر دو طرف مرتکب شدید؛ اینکه می گفتید «فلان کار اینجا درست نیست». شاید بزرگ ترین درسی که امروز درباره استدلال یاد می گیرید این باشد که همین حرف را ننویسید و بدانید که چرا نباید چنین چیزی بگویید.

**لیلا:** راستش من کمی گیج شدم. به نظرم زهرها چنین چیزی گفت و اتفاقاً بجا هم بود. او گفت که حذف کردن دو مقدار مساوی مربوط به معادله می شود و ما اینجا معادله نداریم و نباید چنین کاری کنیم. از طرف دیگر، نفهمیدم که سایه و طرف داران راه حل او، کی حرف مشابهی زده اند! هیچ کدامشان نگفتند «فلان کار اینجا درست نیست».

**من:** لیلا درست تشخیص داد. دقیقاً مشکلم با همین حرف زهرها است. برای نقد یک استدلال باید پایه های آن را تشخیص دهیم و دقیق بررسی کنیم. درست است که مثلاً در معادله می توان مقادیر برابر را از دو طرف حذف کرد، ولی واقعیت این است که در جاهای دیگری هم، مانند اتحادها، می توان چنین کاری کرد، بگذریم. من اگر بخواهم راه سایه را نقد کنم، اشکالی اساسی تر می گیرم. او نوشته است:

$$\begin{aligned} & 2000 \times \frac{2}{3} \times \text{مساحت باغ قدیمی} \\ & 2000 \times \frac{1}{2} \times \text{مساحت باغ قدیمی} \end{aligned}$$

**بخشی از استدلال سایه**

او در اینجا از گفته های قبلی خود نتیجه گرفته است، ولی به جای اینکه یک گزاره (جمله) را نتیجه بگیرد، یک عدد را نتیجه گرفته است. این نوشته اصلاً معنا ندارد. مثل این است که بنویسیم:

$$\frac{9}{61} \Rightarrow \frac{3}{21} \text{ یا } \sqrt{25} \Rightarrow 25 = 5^2$$

که هیچ کدام معنا ندارند. نتیجه گیری تنها از گزاره ها ممکن است و تنها گزاره ها را نتیجه می گیریم، نه عدد را!

**سایه:** فکر کنم دارید سخت گیری می کنید! این اشکال ها درست شدنی هستند.

**من:** سخت گیری نیست. اگر تلاش کنی اشکال ها را درست کنی، بالاخره مجبور خواهی شد سراغ نسبت سود دو نفر بروی و به محض اینکه این نسبت را بنویسی، خود را در تنگناهایی خواهی دید. به قول مریم ساده کردن از صورت و مخرج کسر را لازم داری که ابتدا باید ببینی شرایط آن مهیاست یا نه.

**مریم:** خوب خانم من هم که همین ایراد را گرفته بودم!

**من:** من همان حرف تو را نمی زنم. من می گویم که بخشی از نوشته های سایه بی معناست! ولی تو می گفتی اشتباه است و درست نیست. یعنی فکر می کردی معنا دارد، ولی معنای درستی ندارد. همین سهل انگاری ها باعث می شوند راه کج تر شود و نتیجه های عجیب و غریب پدیدار شوند.